

Al tè del cappellaio

Giochi, enigmi e paradossi per scoprire la logica matematica

Lucca, 14 Gennaio 2025



Cosimo Perini Brogi



SCUOLA
ALTI STUDI
LUCCA

1) Introduzione ←

- La giornata mondiale della logica
- Che cos'è la logica?
- Formalità, paradossi, e contraddizioni

2) I paradossi greci dell'infinito

- Pitagora e i numeri naturali
- Zenone, Achille e la tartaruga

3) La matematica dell'infinito

- Cantor e gli infiniti
- Il paradosso di Russell

4) I paradossi dell'autoferimento

- Epimenide e il bugiardo
- Il teorema di Tarski
- Il teorema di Gödel
- Il teorema di Turing

5) Oltre il vero e il falso

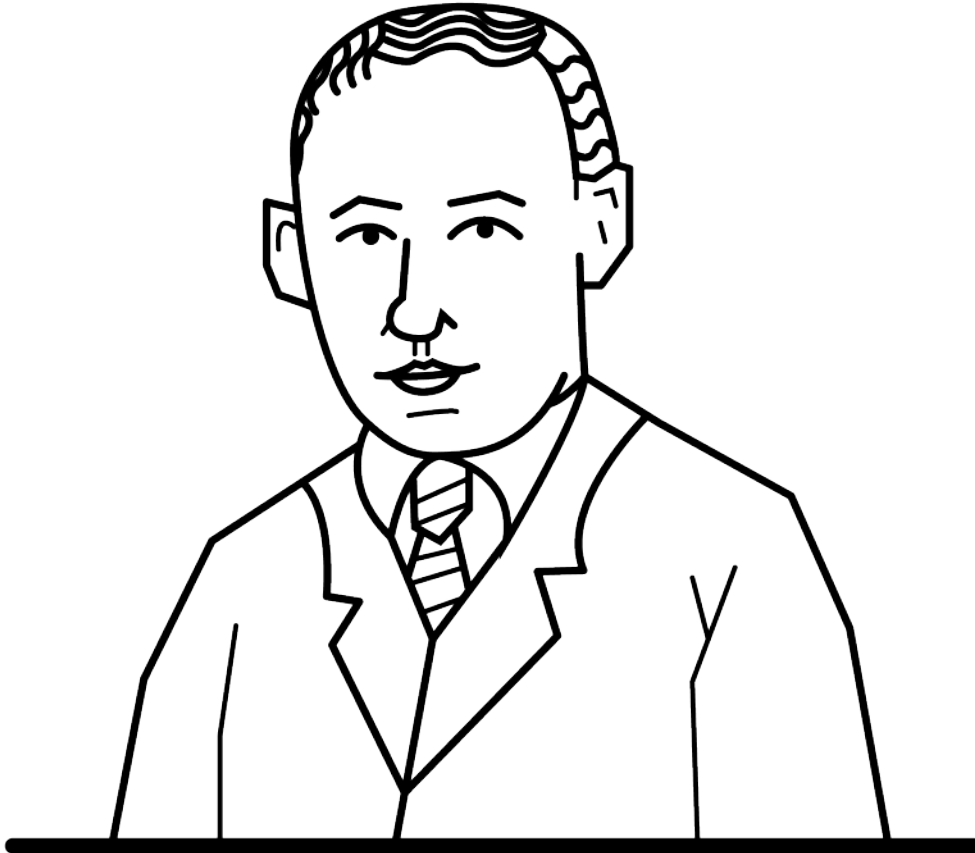
- L'enigma del (non-)compleanno

6) Per approfondire



Fotogramma da "Alice nel paese delle meraviglie",
©Disney 1951

14 Gennaio



Alfred Tarski
1901 - 1983

©matthewleadbeater



Kurt Gödel
1906 - 1978

©matthewleadbeater

La giornata mondiale della logica

«All'alba di questo nuovo decennio – anzi, ora più che mai – la disciplina della **logica** è assolutamente **vitale** per le nostre **società** ed **economie**. L'informatica e la tecnologia digitale, che forniscono la struttura per i modi di vita odierni, sono **radicate nel ragionamento logico e algoritmico**»

Audrey Azoulay, Direttrice UNESCO (2020)



Didier Plovuy/Ministère de la Culture et de la Communication, CC BY-SA 3.0 FR, via Wikimedia Commons

La logica

*54.42. $\vdash :: \alpha \in 2. \supset :: \beta \subset \alpha. !\beta. \beta \neq \alpha. \equiv. \beta \in 1 \cdot \alpha$
Dem.

-. *54.4. $\supset \vdash :: \alpha = l'x \cup l'y. \supset ::$
 $\beta \subset \alpha. \exists !\beta. \equiv : \beta = \Lambda. \vee. \beta = l'x. \vee. \beta = l'y. \supset$

[*24.53.56.*51.161] $\equiv : \beta = l'x. \vee. \beta = l'y. \vee. \beta = \alpha$ (1)
 $\hookrightarrow \vee. \beta = \alpha : \exists !\beta$

\vdash . *54.25. Transp. *52.22. $\supset \vdash : x \neq y. \supset. l'x \cup l'y$

[*13.12] $\supset \vdash : \alpha = l'x \cup l'y. x \neq y. \supset. \alpha \neq l'x. \alpha \neq l'y$ (2)
 $\hookrightarrow \neq l'x. l'x \cup l'y \neq l'$
 \vdash . (1). (2). $\supset \vdash :: \alpha = l'x \cup l'y. x \neq y. \supset ::$

$\beta \subset \alpha. \exists !\beta. \beta \neq \alpha. \equiv : \beta = l'x. \vee. \beta = l'y :$
 $\equiv : (\exists z). z \in \alpha. \beta = l'z :$
 $\equiv : \beta \in 1 \cdot \alpha$ (3)

\vdash . (3). *11.11.35. *54.101. $\supset \vdash$. Prop.

*54.43. $\vdash :: \alpha, \beta \in 1. \supset : \alpha \cap \beta = \Lambda. \equiv. \alpha \cup \beta \in 2$

Dem.

\vdash . *54.26. $\supset \vdash :: \alpha = l'x. \beta = l'y. \supset : \alpha \cup \beta \in 2. \equiv x \neq y.$

[*51.231] $\equiv. l'x \cap l'y = \Lambda.$
 [*13.12] $\equiv. \alpha \cap \beta = \Lambda$ (1)

\vdash . (1). *11.11.35. \supset

$\vdash :: (\exists x, y). \alpha = l'x. \beta = l'y. \supset : \alpha \cup \beta \in 2.$
 $\equiv. \alpha \cap \beta = \Lambda$ (2)

\vdash . (2). *11.54. *52.1. $\supset \vdash$. Prop.

Cos'è la logica?

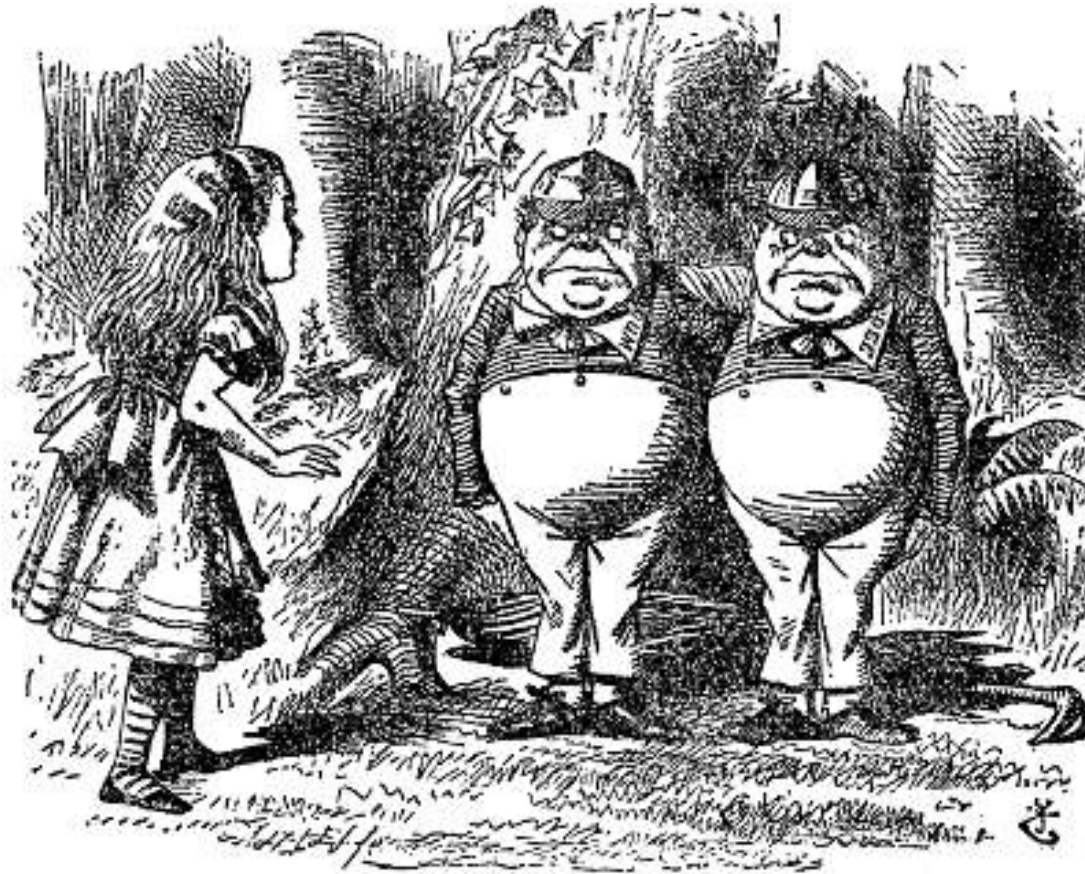
- ✓ Matematica
- ✓ Filosofia
- ✓ Informatica
- ✓ Linguistica
- ✓ Psicologia
- ✓ ...



Arthur Rackham, Public domain, via Wikimedia Commons

Cos'è la logica?!

«[...] Se fosse così, lo sarebbe; e se era così, lo potrebbe essere; ma dato che non è così, allora non lo è. **È la logica!**»



L'esempio del Cappellaio

«[...] Quando parli, dovresti *dire* ciò che *intendi* dire» soggiunse il Leprotto Marzolino.

«Certo» replicò prontamente Alice; «perlomeno - perlomeno io *intendo* dire proprio ciò che *dico* - che è poi la stessa cosa, no?»

«No che non è la stessa cosa!» esclamò il Cappellaio. «A questa stregua, potresti sostenere che “Vedo ciò che mangio” sia la stessa cosa di “Mangio ciò che vedo”!»



Una disciplina formale

Ti viene mostrato un insieme di quattro carte posizionate su un tavolo, ciascuna delle quali ha un numero su un lato e un colore sull'altro. I lati visibili delle carte mostrano "3", "8", "blu" e "rosso". Quale/i carta/e devi girare per verificare che, se una carta mostra un numero pari su un lato, allora il lato opposto deve essere blu?



Una disciplina formale

Ti viene mostrato un insieme di quattro carte posizionate su un tavolo, ognuna delle quali ha un'età su un lato e una bevanda sull'altro. Le facce visibili delle carte mostrano "bere alcol", "bere soda", "16 anni" e "25 anni". Quale/i carta/e devi girare per verificare che, se qualcuno sta bevendo alcol, allora deve avere 18 anni o più?



Una disciplina formale

Ti viene mostrato un insieme di quattro carte posizionate su un tavolo, ciascuna delle quali ha un numero su un lato e un colore sull'altro. I lati visibili delle carte mostrano "3", "8", "blu" e "rosso". Quale/i carta/e devi girare per verificare che, se una carta mostra un numero pari su un lato, allora il lato opposto deve essere blu?



Ti viene mostrato un insieme di quattro carte posizionate su un tavolo, ognuna delle quali ha un'età su un lato e una bevanda sull'altro. Le facce visibili delle carte mostrano "bere alcol", "bere soda", "16 anni" e "25 anni". Quale/i carta/e devi girare per verificare che, se qualcuno sta bevendo alcol, allora deve avere 18 anni o più?



Un meraviglioso *modus ponens*

*E poi se la gente sa – **e la gente lo sa** – che sai suonare,
suonare ti tocca per tutta la vita, e ti piace lasciarti ascoltare*

Fabrizio De André, *Il suonatore Jones*, 1971

Se la gente sa che sai suonare, **allora** suonare ti tocca per tutta la vita... La gente sa che sai suonare

Suonare ti tocca per tutta la vita...

Cacciatori di paradossi



Fotogramma da "Rabbit Fire",
© 1951 Warner Bros, via
Wikimedia Fair Use

È la stagione degli assurdi:

Conclusioni bizzarre,
controintuitive, paradossali,
ma matematicamente
corrette

È la stagione delle contraddizioni:

Conclusioni bizzarre,
controintuitive, paradossali, e
matematicamente sbagliate

Il teorema del ciuchino



Immagine da shrekadventures.com, via Wikimedia Fair Use

Teorema: $2 = 1$.

Dimostrazione:

Prendiamo due numeri, a e b .

Procediamo come segue:

1) $a = b$

2) $a^2 = ab$

3) $a^2 + a^2 = a^2 + ab$

4) $2a^2 = a^2 + ab$

5) $2a^2 - 2ab = a^2 + ab - 2ab$

6) $2a^2 - 2ab = a^2 - ab$

7) $2(a^2 - ab) = 1(a^2 - ab)$

8) **$2 = 1$**

Ma qui c'è un **errore!**

La fabbrica di cioccolato Banach-Tarski

Fotogramma da "Willy Wonka e la fabbrica di cioccolato", ©Warner Bros 1971, via Wikimedia Fair Use



©scienceabc.com



Peterdownunder, CC BY-SA 4.0 Wikimedia

1) Introduzione

- La giornata mondiale della logica
- Che cos'è la logica?
- Formalità, paradossi, e contraddizioni

2) I paradossi greci dell'infinito ←

- Pitagora e i numeri naturali
- Zenone, Achille e la tartaruga

3) La matematica dell'infinito

- Cantor e gli infiniti
- Il paradosso di Russell

4) I paradossi dell'autoferimento

- Epimenide e il bugiardo
- Il teorema di Tarski
- Il teorema di Gödel
- Il teorema di Turing

5) Oltre il vero e il falso

- L'enigma del (non-)compleanno

6) Per approfondire



Fotogramma da "Alice nel paese delle meraviglie",
©Disney 1951

L'infinito degli antichi Greci

Apeiron di Anassimandro



Logos di Pitagora



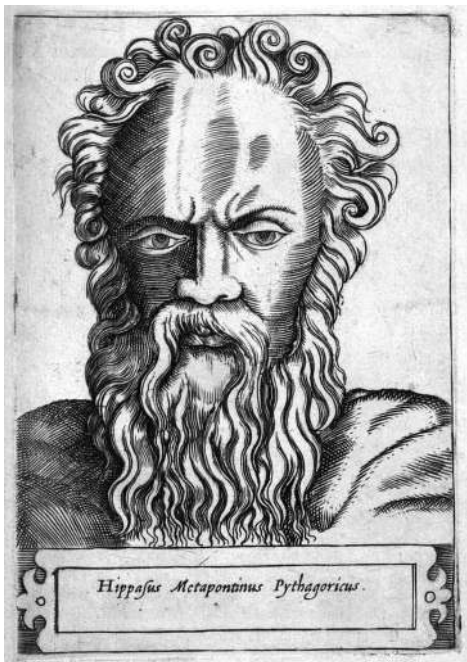
To on di Parmenide

I numeri sono tutto!

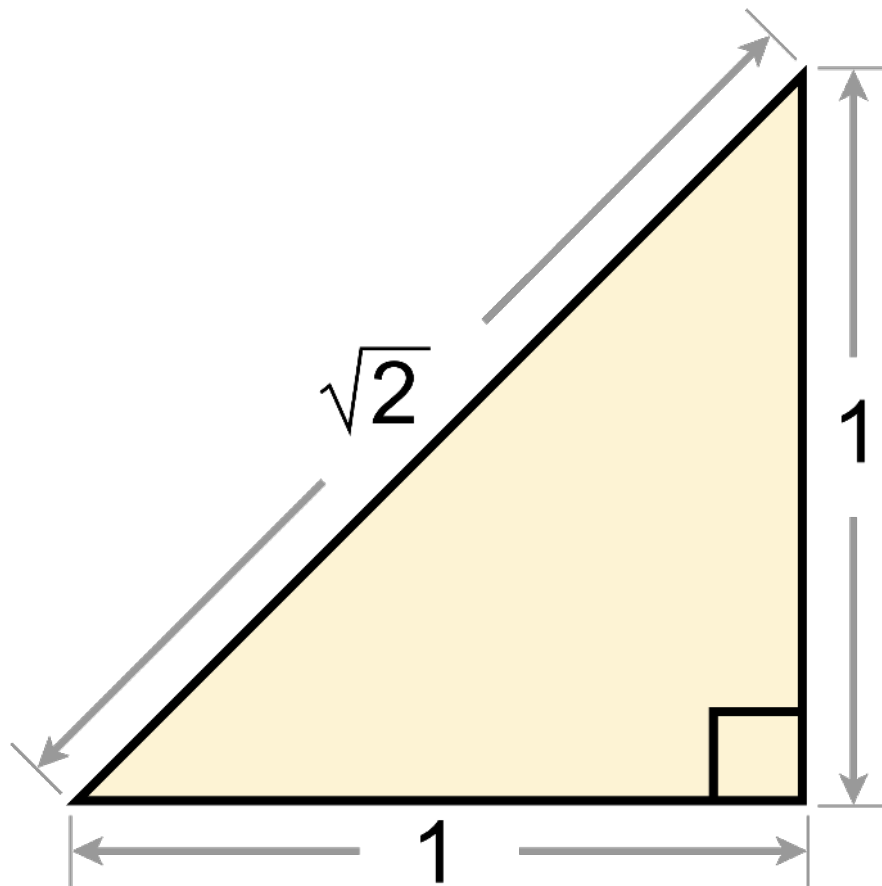
- *E tu bel bimbo, bimbo mio dolce, dimmi, cosa vuoi che io ti canti?*
- *Cantami **dei numeri la serie**, sino a che io oggi non la impari...*

Angelo Branduardi, *La serie dei numeri*, 1976

1+1
1+1+1
1+1+1+1
1+1+1+1+1
...



I numeri sono tutto?



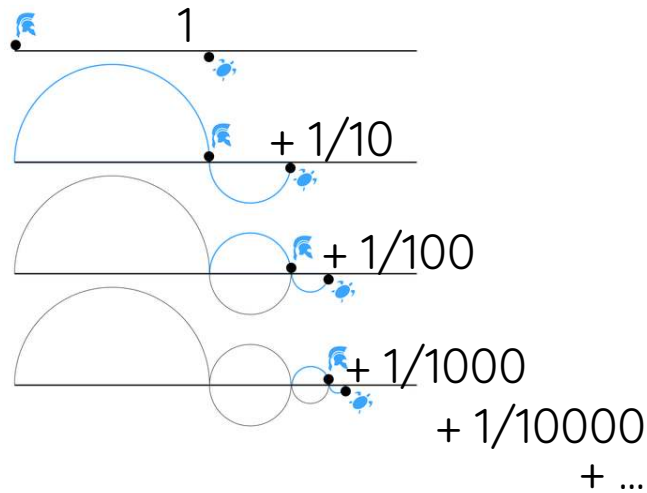
$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\ddots}}}}$$

Un solo numero è tutto!

«Achille, simbolo di rapidità, deve raggiungere la tartaruga, simbolo di lentezza. Achille corre dieci volte più svelto della tartaruga e le concede dieci metri di vantaggio. Achille corre quei dieci metri e la tartaruga percorre un metro; Achille percorre quel metro, la tartaruga percorre un decimetro; Achille percorre quel decimetro, la tartaruga percorre un centimetro; Achille percorre quel centimetro, la tartaruga percorre un millimetro; Achille percorre quel millimetro, la tartaruga percorre un decimo di millimetro, e così via all'infinito; di modo che Achille può correre per sempre senza raggiungerla.»

Jorge Luis Borges, *Metamorfosi della tartaruga*, 1973

Traduzione di F. Tentori Montalto



Assurdo!

Quindi non ci sono infiniti numeri???

Ma qui c'è un **errore!**

Infatti, $\frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \frac{1}{10000} + \frac{1}{100000} + \frac{1}{1000000} + \frac{1}{10000000} + \dots = \frac{1}{9}$

e non fa infinito!!

1) Introduzione

- La giornata mondiale della logica
- Che cos'è la logica?
- Formalità, paradossi, e contraddizioni

2) I paradossi greci dell'infinito

- Pitagora e i numeri naturali
- Zenone, Achille e la tartaruga

3) La matematica dell'infinito ←

- Cantor e gli infiniti
- Il paradosso di Russell

4) I paradossi dell'autoferimento

- Epimenide e il bugiardo
- Il teorema di Tarski
- Il teorema di Gödel
- Il teorema di Turing

5) Oltre il vero e il falso

- L'enigma del (non-)compleanno

6) Per approfondire



Fotogramma da "Alice nel paese delle meraviglie",
©Disney 1951

Verso l'infinito e oltre!



Fotogramma da "Toy Story",
©Disney/Pixar 1995, Wikimedia



Ritratto di Georg Cantor,
Pubblico Dominio Wikimedia

Infiniti infiniti

1) 1, **0** 0 2 3 5 1 ...
2) 1, 0 **2** 0 1 2 7 9 ...
3) 1, 1 3 **0** 2 3 4 9 ...
4) 1, 3 6 3 **2** 9 4 3 ...
5) 1, 6 3 2 8 **3** 6 2 ...
6) 1,
7)
8)
9)
10)
....



1) 1, **1** 0 2 3 5 1 ...
2) 1, 0 **3** 0 1 2 7 9 ...
3) 1, 1 3 **1** 2 3 4 9 ...
4) 1, 3 6 3 **3** 9 4 3 ...
5) 1, 6 3 2 8 **4** 6 2 ...
6) 1,
7)
8)
9)
10)
....

Assurdo!

Quindi i numeri tra 1 e 2 sono molti di più di 1, 2, 3, 4, 5, 6...

Tipi autoreferenziali



Fotogramma da "Io e Annie",
©United Artists 1977

«Io non vorrei mai appartenere a nessun club che contasse tra i suoi membri uno come me.»

Il paradosso di Russell



È un membro di



Ritratto di Bertrand Russell,
Pubblico Dominio Wikimedia

Immagine da Dominio Pubblico
Wikimedia

Il paradosso di Russell

Non è un membro di

Immagine da "La bella e la bestia", ©Disney 1955



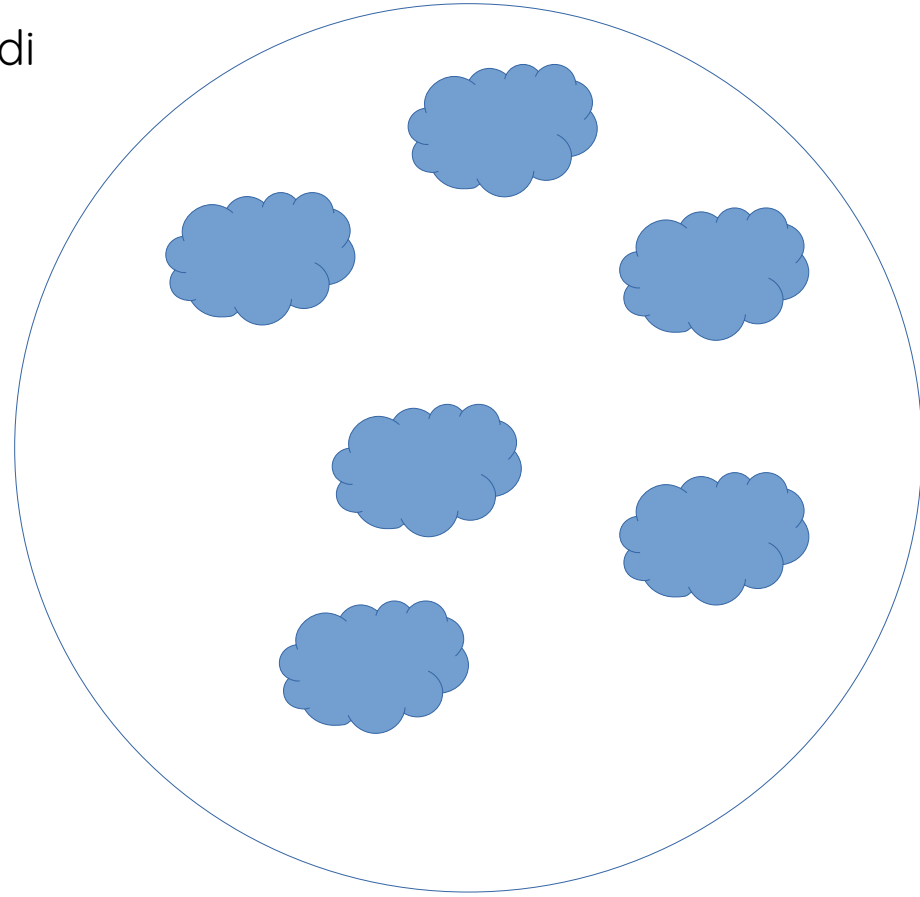
Ritratto di Bertrand Russell,
Pubblico Dominio Wikimedia

Immagini da Dominio Pubblico
Wikimedia

Il paradosso di Russell

È un membro di

Immagine da "La bella e la bestia", ©Disney 1955

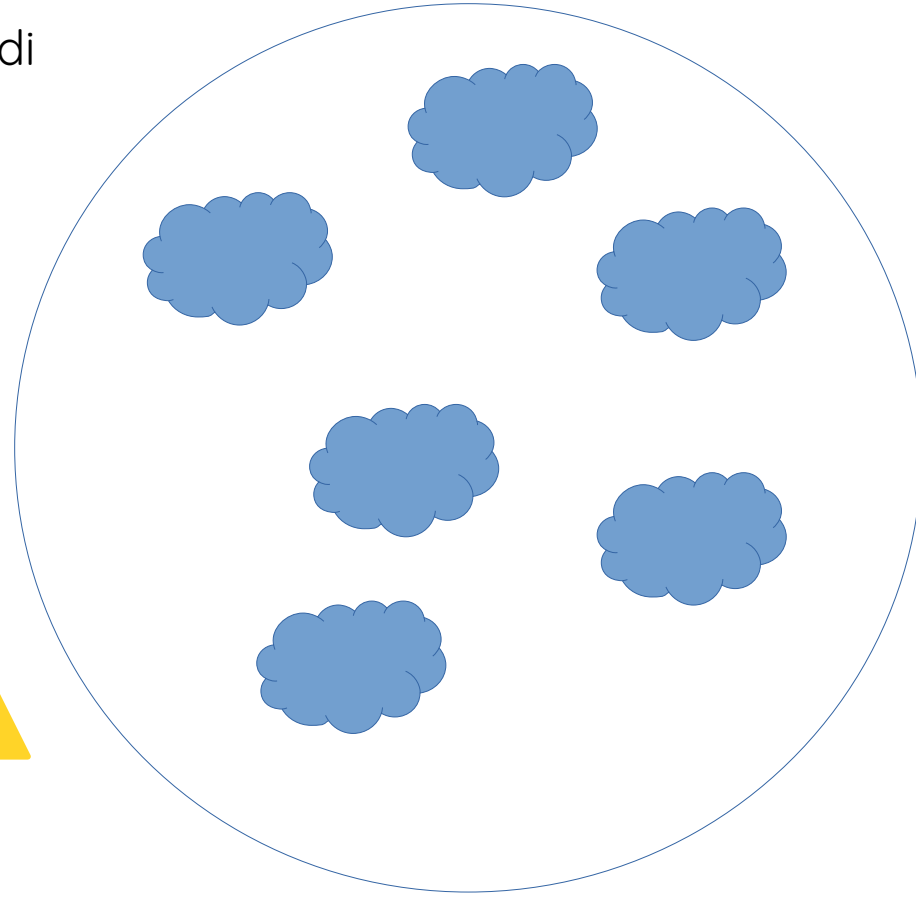
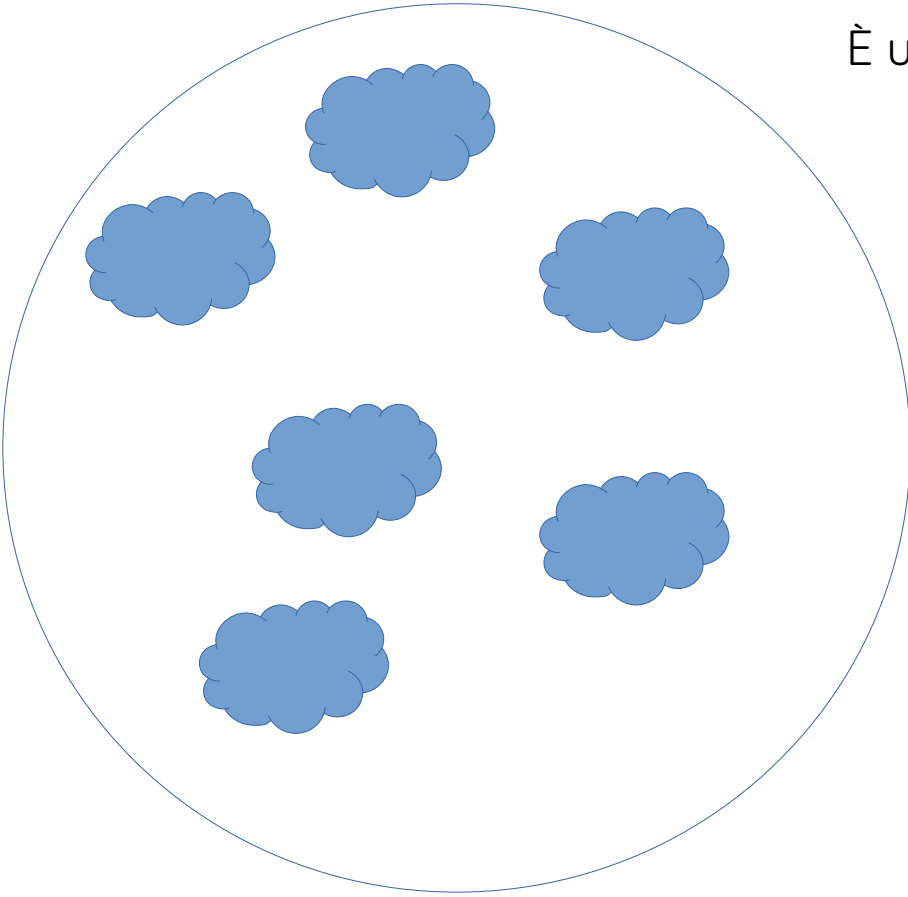


Ritratto di Bertrand Russell,
Pubblico Dominio Wikimedia

Immagini da Dominio Pubblico
Wikimedia

Il paradosso di Russell

È un membro di



Ritratto di Bertrand Russell,
Pubblico Dominio Wikimedia

Il Cappellaio di Russell

Esiste un cappellaio che confeziona cappelli a *tutte e sole* le persone che non si confezionano da sole i propri cappelli.

Quindi: Chi confeziona il cappello al cappellaio??



1) Introduzione

- La giornata mondiale della logica
- Che cos'è la logica?
- Formalità, paradossi, e contraddizioni

2) I paradossi greci dell'infinito

- Pitagora e i numeri naturali
- Zenone, Achille e la tartaruga

3) La matematica dell'infinito

- Cantor e gli infiniti
- Il paradosso di Russell

4) I paradossi dell'auto riferimento ←

- Epimenide e il bugiardo
- Il teorema di Tarski
- Il teorema di Gödel
- Il teorema di Turing

5) Oltre il vero e il falso

- L'enigma del (non-)compleanno

6) Per approfondire



Fotogramma da "Alice nel paese delle meraviglie",
©Disney 1951

Non c'è linguaggio senza inganno.

Italo Calvino, *Le città invisibili*, 1972

La città di Ipazia



Il paradosso del cretese Epimenide

I cretesi sono bugiardi



Il paradosso del bugiardo



Il teorema di Tarski

Questa frase è matematicamente falsa



Foto di George Bergman, GFDL 1.2 via Wikimedia

Il teorema di Gödel

Questa frase è matematicamente indimostrabile



Domino Pubblico Wikimedia

Il teorema di Turing

Questo antivirus infallibile è inarrestabile



1) Introduzione

- La giornata mondiale della logica
- Che cos'è la logica?
- Formalità, paradossi, e contraddizioni

2) I paradossi greci dell'infinito

- Pitagora e i numeri naturali
- Zenone, Achille e la tartaruga

3) La matematica dell'infinito

- Cantor e gli infiniti
- Il paradosso di Russell

4) I paradossi dell'autoriferimento

- Epimenide e il bugiardo
- Il teorema di Tarski
- Il teorema di Gödel
- Il teorema di Turing

5) Oltre il vero e il falso ←

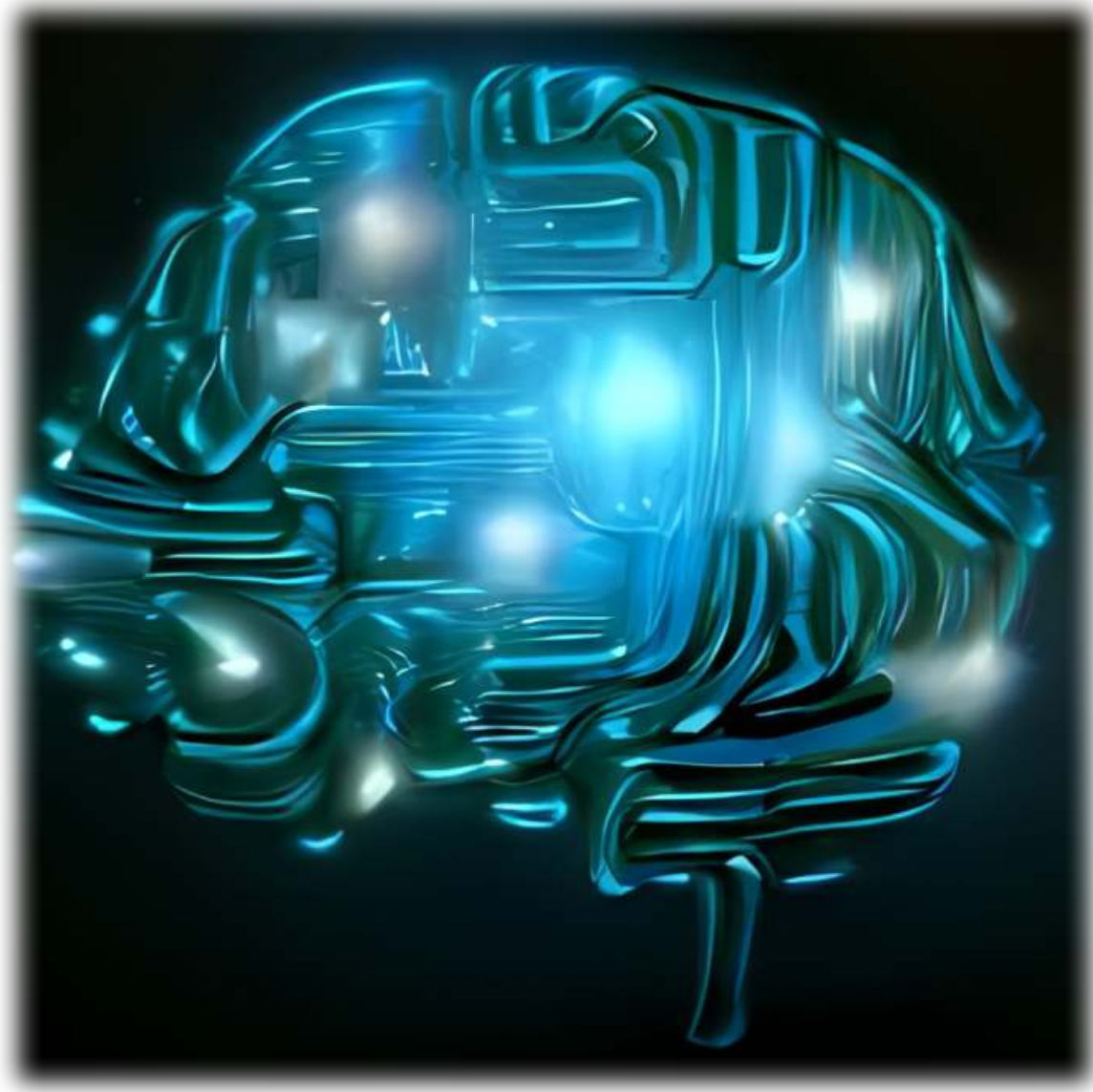
- L'enigma del (non-)compleanno

6) Per approfondire

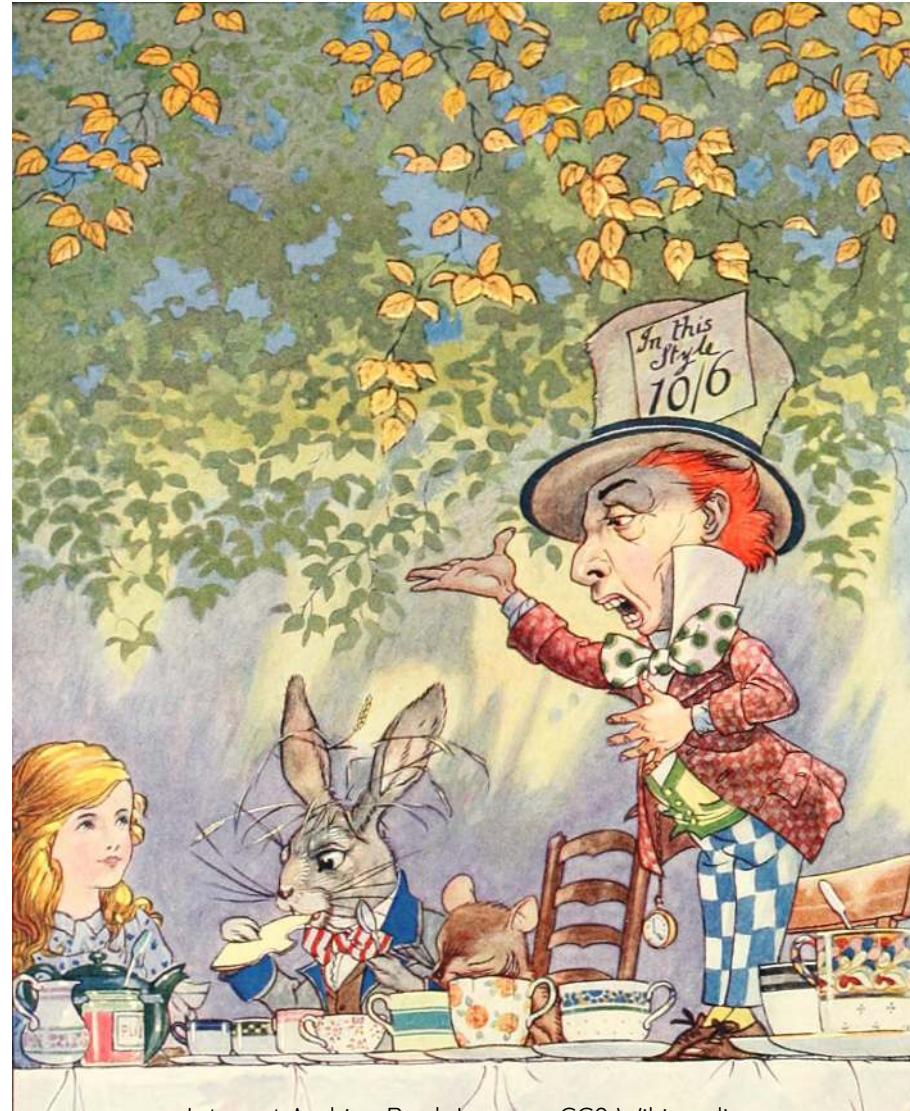


Fotogramma da "Alice nel paese delle meraviglie",
©Disney 1951

Oltre il mondo dei bits



Un buon non-compleanno a te!



L'enigma del compleanno

Al tè del Cappellaio, Alice e il Bianconiglio chiedono al Cappellaio: «Quand'è il tuo compleanno?» Il Cappellaio risponde: «Non vi dirò la data precisa, ma voglio darvi qualche indizio...» e elenca così le seguenti dieci date:

- 15 Maggio, 16 Maggio, 19 Maggio
- 17 Giugno, 18 Giugno
- 14 Luglio, 16 Luglio
- 14 Agosto, 15 Agosto, 17 Agosto

Il Cappellaio prosegue: «Sono nato in uno di questi dieci giorni. A te, **Alice**, confiderò **il mese** in cui sono nato; mentre, a te, **Bianconiglio**, dirò **il giorno** del mese in cui sono nato.»

Dopodiché sussurra all'orecchio di Alice il mese (ed il mese soltanto!) del suo compleanno, mentre all'orecchio del Bianconiglio sussurra il giorno (ed il giorno soltanto!). A questo punto il Cappellaio chiede:

«Sai dirmi quando sono nato, Alice?»

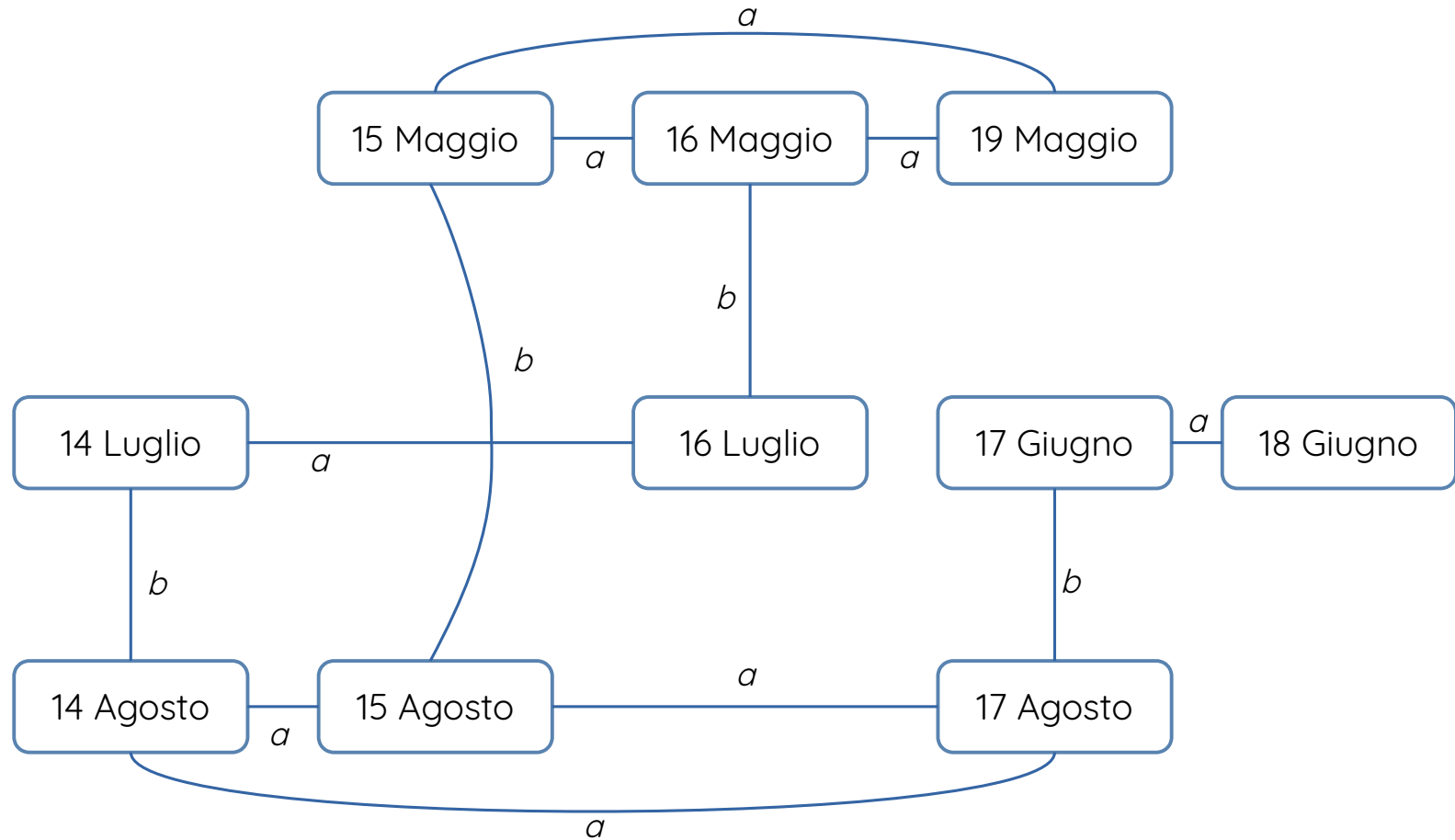
«No, non lo so,» risponde Alice, «Ma so che neanche il Bianconiglio lo sa...»

«All'inizio,» dice allora il Bianconiglio, «non lo sapevo, ma adesso lo so!»

«Bene, perché adesso lo so anch'io!» esclama Alice.

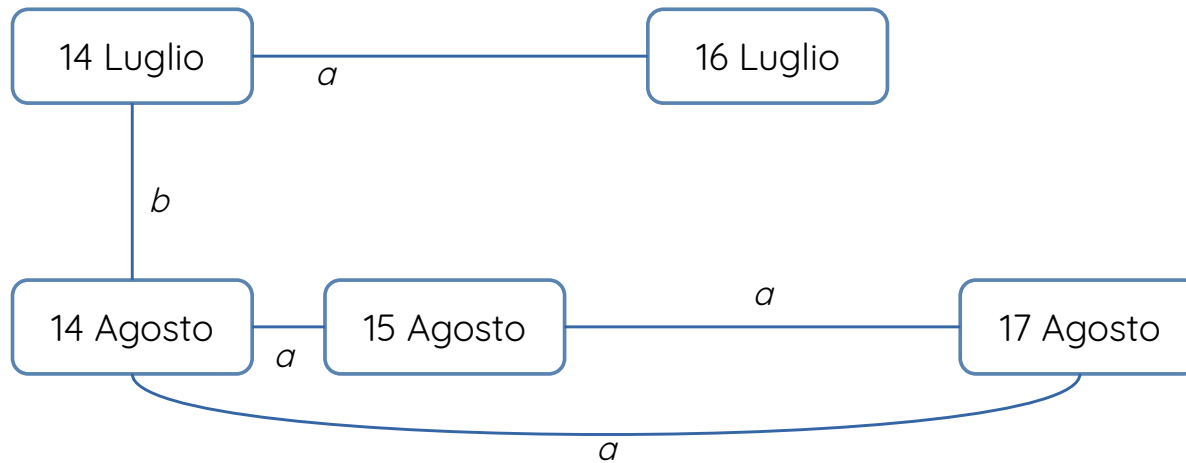
Quando è nato il
cappellaio?

La soluzione dell'enigma



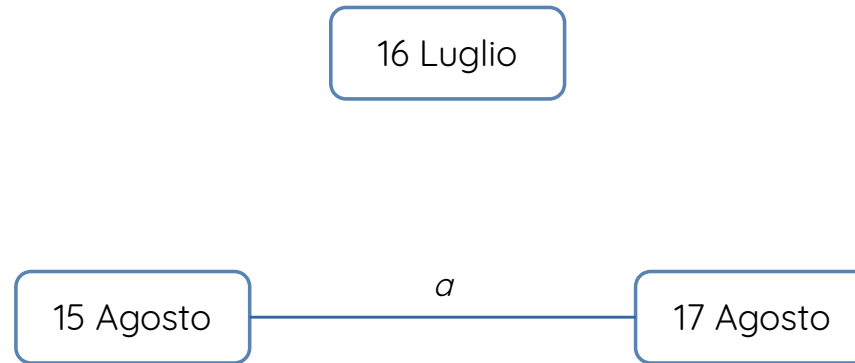
«Sai dirmi quando sono nato, Alice?»

La soluzione dell'enigma



«No, non lo so,» risponde Alice, «Ma so che neanche il Bianconiglio lo sa...»

La soluzione dell'enigma



«All'inizio,» dice allora il Bianconiglio, «non lo sapevo, ma adesso lo so!»

La soluzione dell'enigma

16 Luglio

«Bene, perché adesso lo so anch'io!»
esclama Alice.

1) Introduzione

- La giornata mondiale della logica
- Che cos'è la logica?
- Formalità, paradossi, e contraddizioni

2) I paradossi greci dell'infinito

- Pitagora e i numeri naturali
- Zenone, Achille e la tartaruga

3) La matematica dell'infinito

- Cantor e gli infiniti
- Il paradosso di Russell

4) I paradossi dell'auto riferimento

- Epimenide e il bugiardo
- Il teorema di Tarski
- Il teorema di Gödel
- Il teorema di Turing

5) Oltre il vero e il falso

- L'enigma del (non-)compleanno

6) Per approfondire ←

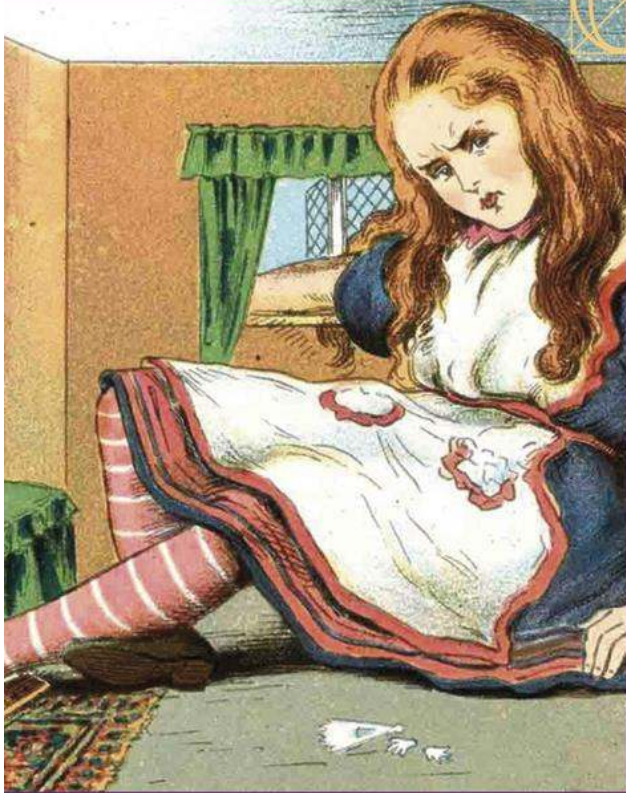


Fotogramma da "Alice nel paese delle meraviglie",
©Disney 1951

Idee

CARROLL

ALICE NEL PAESE DELLE MERAVIGLIE
ATTRAVERSO LO SPECCHIO



Garzanti i grandi libri

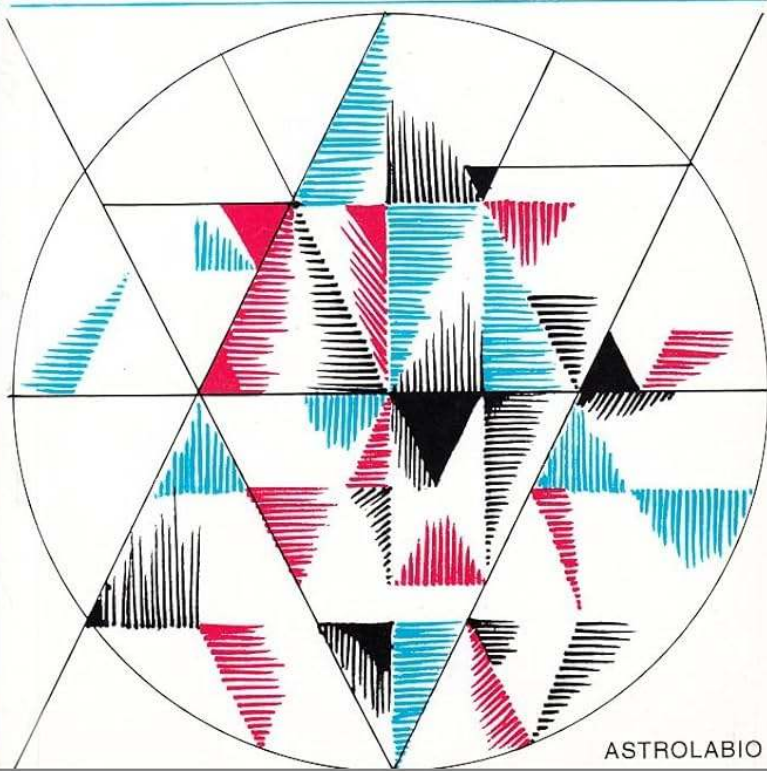
Lewis Carroll

*Alice nel paese delle Meraviglie;
Attraverso lo Specchio*

Garzanti 2024

LEWIS CARROLL

IL GIOCO DELLA LOGICA

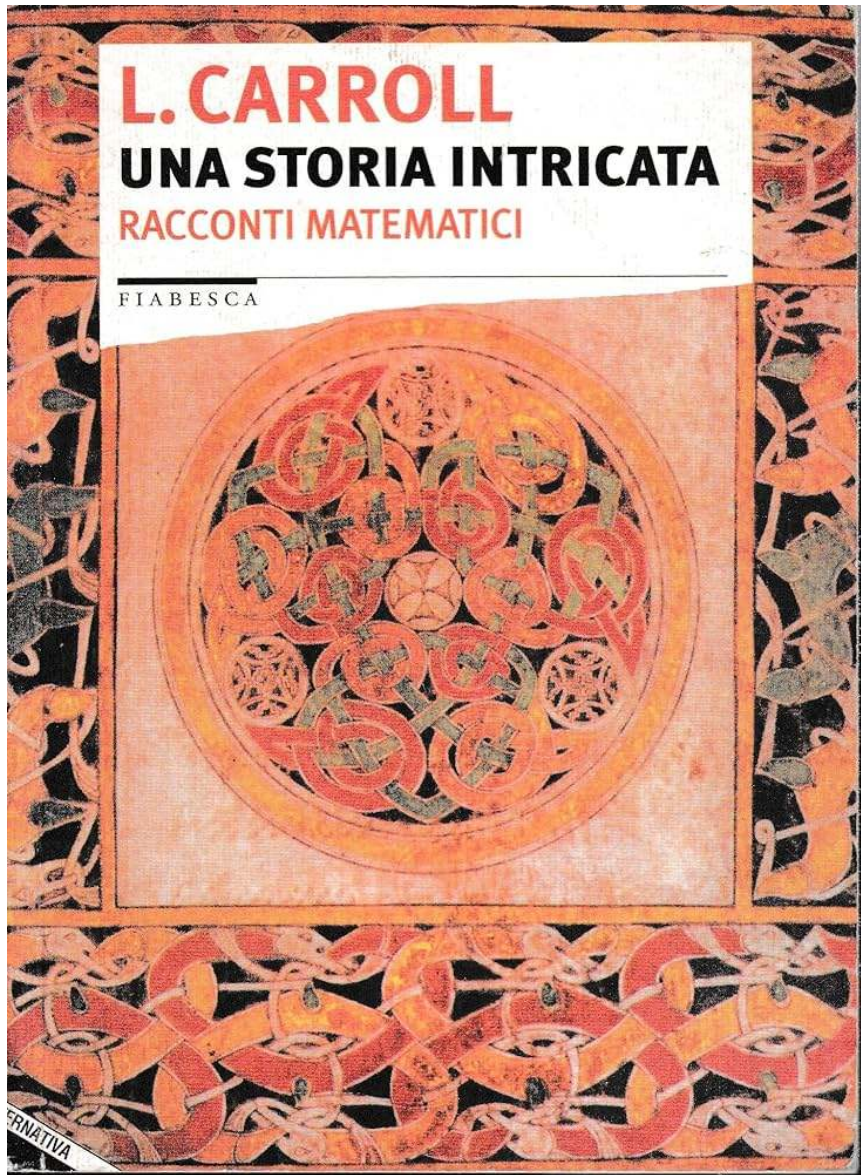


ASTROLABIO

Lewis Carroll

Il gioco della logica

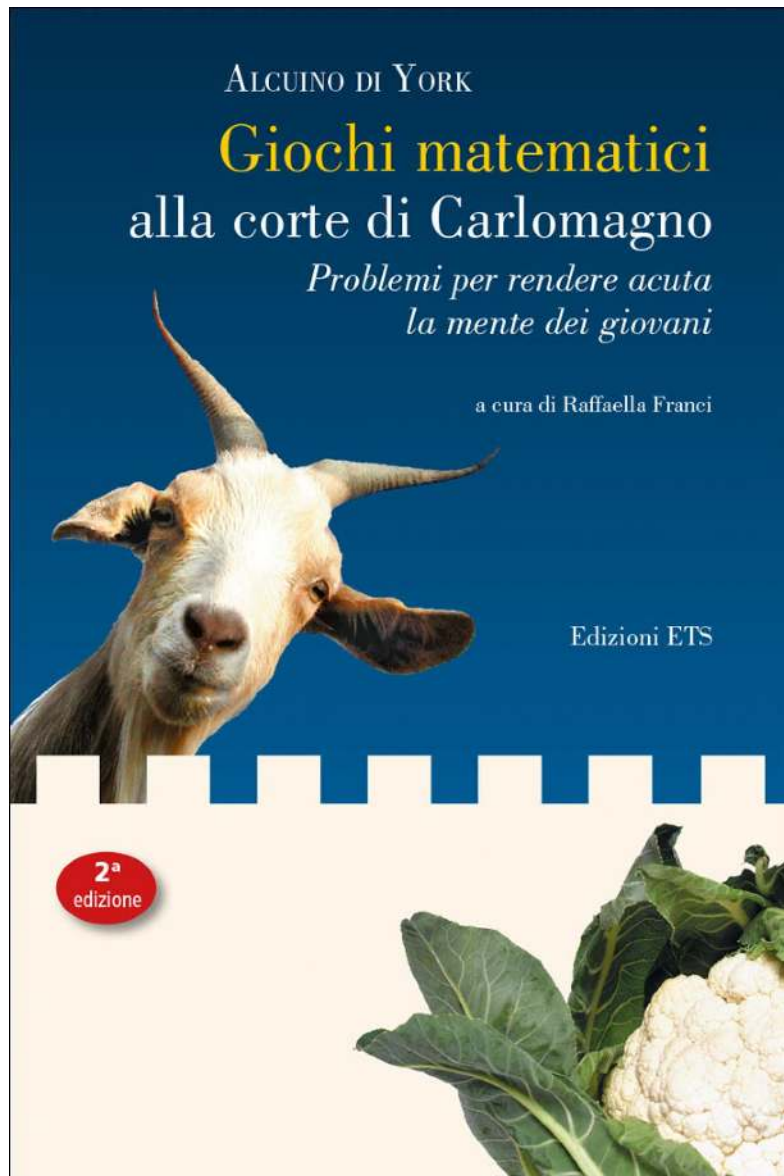
Astrolabio 1978



Lewis Carroll

Una storia intricata

Stampa Alternativa 1998



Alcuino di York

*Giochi matematici alla corte di
Carlomagno*

ETS 2016



RUSSELL

I principi della matematica

Introduzione di Bruno Widmar

Traduzione di Enrico Carone e Maurizio Destro

Edizione integrale



La natura del numero, dell'infinito, dello spazio, del tempo, del movimento, e della stessa deduzione matematica, sono tutti problemi ai quali sarà data, in questo lavoro, una soluzione dimostrabile con matematica certezza.

GRANDI TASCABILI ECONOMICI NEWTON SAGGI

Bertrand Russell

I principi della matematica

Newton Compton 2011



LOGICOMIX

di Apostolos Doxiadis
e Christos H. Papadimitriou

Disegni di Alecos Papadatos e Annie Di Donna

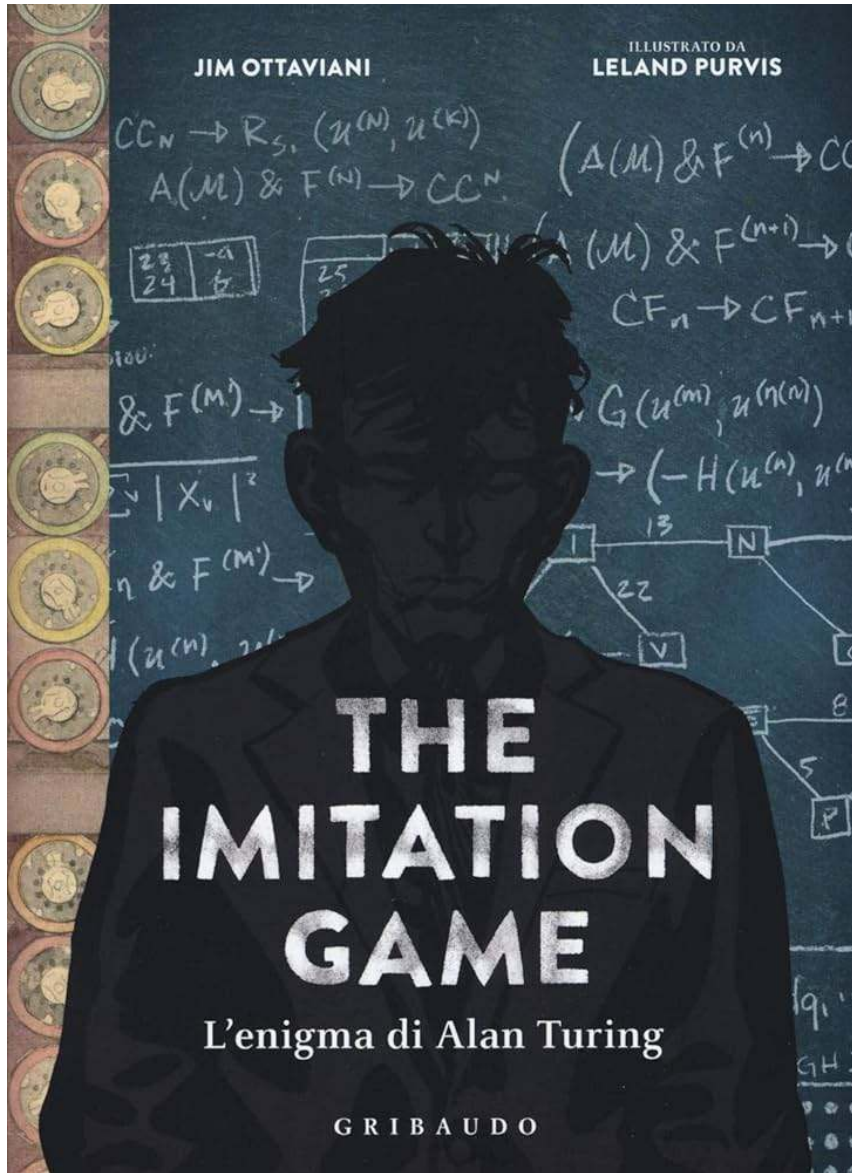


Introduzione di Giulio Giorello

Apostolos Doxiadis,
Christos H. Papadimitriou

Logicomix

Guanda 2017



Jim Ottaviani,
Leland Purvis

The Imitation Game

Gribaudo 2016



Andrew Hodges

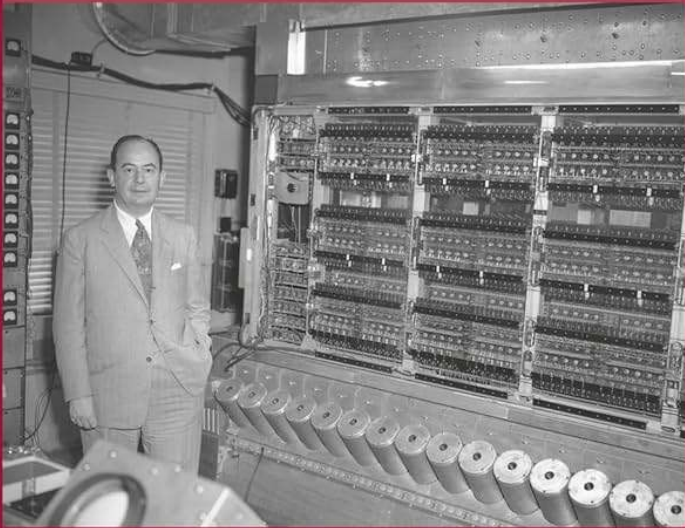
Alan Turing. Storia di un Enigma

Bollati Boringhieri 2014

GLI ADELPHI

Martin Davis

Il calcolatore universale



Martin Davis

Il calcolatore universale

Adelphi 2014

PIERGIORGIO ODIFREDDI
IL DIAVOLO IN CATTEDRA
LA LOGICA DA ARISTOTELE A GÖDEL



Piergiorgio Odifreddi

Il diavolo in cattedra

Einaudi 2006



Gabriele Lolli

$n \in K \equiv \overline{\text{Bew}} [R(n); n]$

**I teoremi
di incompletezza**

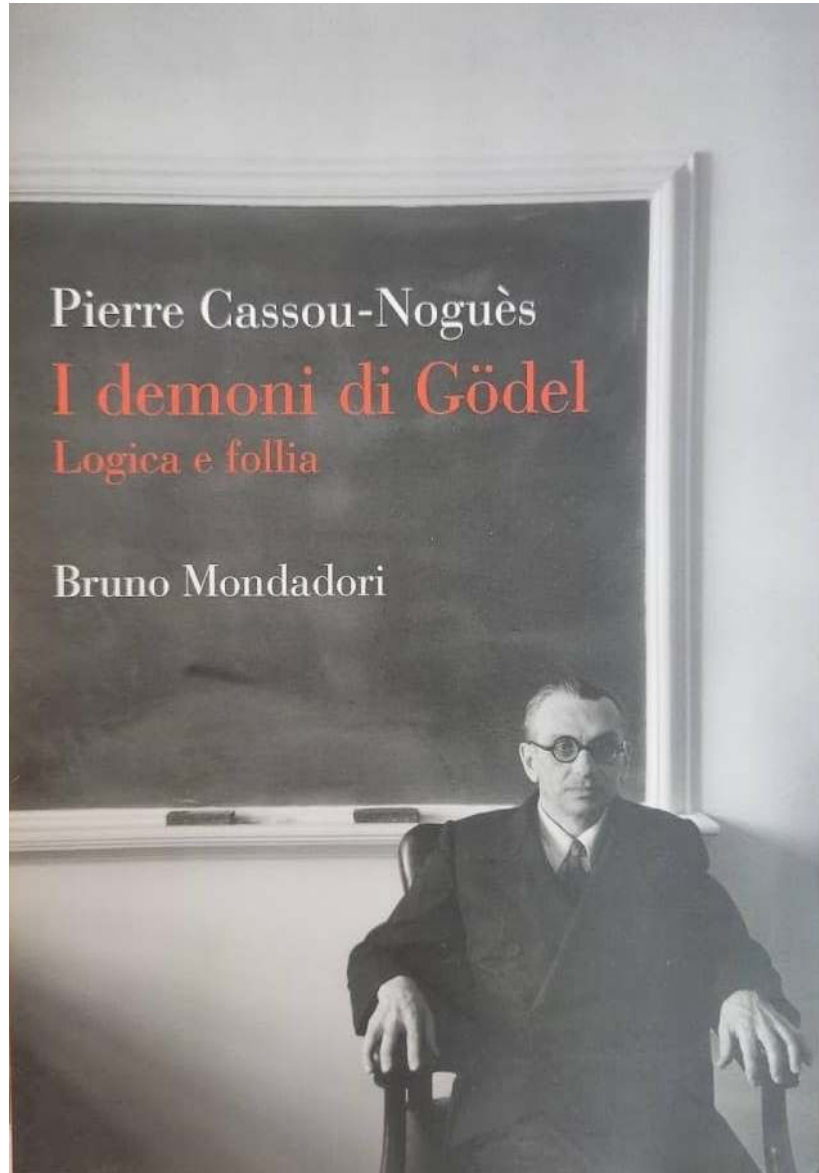
n

il Mulino

Gabriele Lolli

I teoremi di incompletezza

Il Mulino 2019



Pierre Cassou-Noguès

I demoni di Gödel

Bruno Mondadori 2008

GLI ADELPHI

Douglas R. Hofstadter

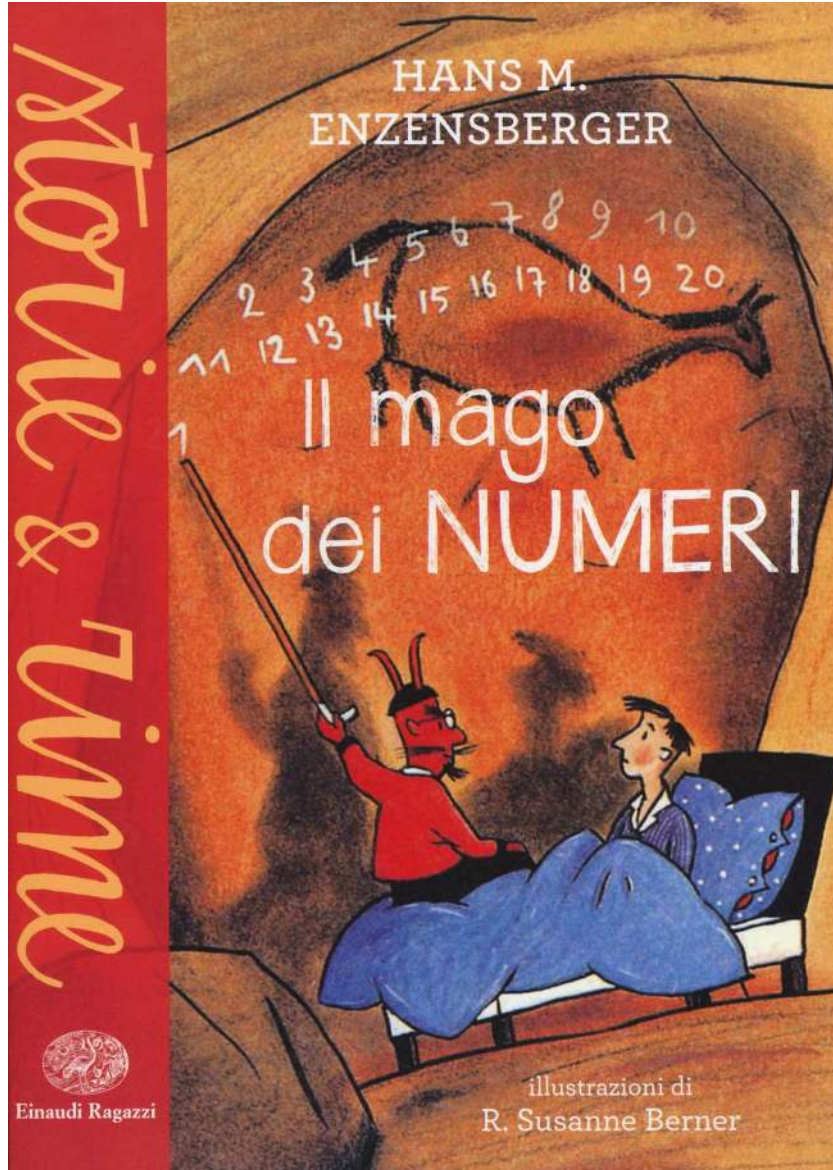
Gödel, Escher, Bach:
un'Eterna Ghirlanda Brillante



Douglas R. Hofstadter

Gödel, Escher, Bach:
un'Eterna Ghirlanda Brillante

Adelphi 1990



Hans Magnus Enzensberger

Il mago dei numeri

Einaudi 2014

Grazie per la vostra attenzione!



**COSIMO
PERINI BROGI**

Assistant Professor
Research Unit SysMA
Systems Security, Modelling and Analysis

Piazza S. Francesco, 19 - 55100 Lucca (Italy)

cosimo.perinibrogi@imtlucca.it | www.logicosimo.gitlab.io

